Table of Contents

Uitleg (Toernooi) Performancerating (TPR)

(november 2014) Kees Pippel

Nu de definitieve ratings van de Nederlandse Dambond voor 2012 bekend zijn (KNDB) is het een goed moment om aandacht te schenken aan een onderwerp waar ik als competitieleider van Damclub IJmuiden (DCIJ) regelmatig vragen over krijg: wat betekent de toernooiprestatierating (TPR) en hoe wordt deze bepaald. Diverse organisaties administreren de speelsterkte van spelers in een ratingsysteem: voor dammers bijvoorbeeld de KNDB en de FMJD, voor schakers de FIDE, en de diverse nationale bonden.

De Performancerating is een hypothetische ratingprestatie die voortvloeit uit de selectie van een aantal gekozen partijen, bijvoorbeeld de gespeelde partijen in één competitie. Toernooimanagers als Sevilla [1] hebben functies om de performancerating (PR) te bepalen.

Toepasingen Performancerating

- De FIDE kent de titels Woman(GM) en Woman(IM) toe op basis van een gerealiseerde PR norm tegen spelers die gemiddeld minimaal een bepaalde rating hebben. Zie Requirements for the titles (1.48) in *FIDE Handbook B*.
- Tijdens de schaak Olympiade worden er niet alleen prijzen uitgereikt aan de hoogst geëindigde teams. Er zijn ook prijzen voor voor de beste individuele prestatie. In tegenstelling tot vroeger (voor 2012) telt niet het hoogste percentage, maar de hoogste prestatierating.
- Daarnaast is de PR een populair middel om de eigen ratingprestatie te beoordelen.

d_p	p
0-3	0.50
099-106	0.64
138-145	0.69
198-206	0.76
279-290	0.84
620-735	0.99
736- +∞	1.00

Het principe achter het Elo-ratingsysteem (The Elo-rating system) De aanname achter het Elo-ratingsysteem is dat kleine plusscores optelbaar zijn. Als speler A wint van speler B volgens 55% - 45 % (plusscore = 5%), En speler B wint van speler C met 55% - 45% (plusscore = 5%), dan is het redelijk om aan te nemen dat speler A wint van speler C met 60% - 40% (plusscore = 10%).

De kern van de ratingwaardering is een verband tussen de verwachte score over één of meerdere partijen tussen twee spelers en het ratingverschil van deze spelers. Dit verband tussen ratingverschil(d_p) en verwachting (p) noemen we de verwachtingsfunctie: E(x). In het standaard Elo-systeem is dit een symmetrische S-vormige figuur, tussen 0% en 100%, waarbij E(0) = 50% en E(x) + E(-x) = 1. We kunnen dit verband samenvatten in de nevenstaande tabel.

Berekening van de Elo-ratingverschiltabel In de beginfase (1960) werden alle berekeningen uitgevoerd met potlood en papier. Een groot voordeel, de beperking dwingt tot eenvoud en essentie: simpel, maar niet te simpel. Een vereenvoudiging is de benadering van de cumulatieve Gauss-verdeling door een tabel. In The Rating of Chessplayers motiveert Elo de tabel als volgt:

> **8.94 Development of the Percentage Expectancy Table** The normal probabilities may be taken directly from the standard tables of the areas under the normal curve when the difference in rating is expressed as a z score. Since the standard deviation σ of the individual performances is defined as 200 points, the standard deviation σ' of the differences in performance becomes σ√2 or 282.84. The z value of a difference then is

> D/282.84. This z will then divide the area under the curve into two parts, the larger giving P for the higher rated player and the smaller giving P for the lower rated player.
>
> For example, let D = 160. Then z = 160/282.84 = 0.566. The table gives .7143 and .2857 as the area of the two portions under the curve. These probabilities are rounded to two figures in table 2.11.

Tabel 2.11 wordt door de FIDE nog steeds gebruikt (Formula's FIDE Rating Tables 8.1b).

Wanneer we het rekenvoorbeeld van Elo toepassen op 161, dan wordt het resultaat .716, afgerond 72%. Maar in de Elo/FIDE tabel is dit 71%. Bij nader inzien blijkt dat de tabel is opgebouwd met σ = 2000 / 7 = 285,71428.

> Terzijde:
>
> In de tabel komen een beperkt aantal (onverklaarbare) afrondingsverschillen voor. De verwachting van 620 is nauwkeuriger uitgedrukt: 98,49997%. Dus eigenlijk hoort 620 bij 98%. Er zijn nog drie andere afrondingsverschillen: 54, 358, 392. Verder behoren 343 en 344 tot 89% in plaats van 88%. De verwachting van 344 is namelijk: 88,570%, afgerond 89%.

Toepassingen van de Elo-rating Een praktische toepassing van het ratingsysteem is: als team A, bestaande uit 10 spelers, gemiddeld 150 ratingpunten meer heeft danteam B, dan zal team A volgens de ratingprognose een score realiseren van 70%, wat overeenkomt met een damscore van 14-6. Stel dat een ratingverschil 200 is. Dat is ongeveer 25% in het traject 198-206. Wanneer we dat doorvertalen naar het percentage dan is het resultaat 75,5% + (2 / 8) × 1% = 75,75%: Dit noemen we: lineaire extrapolatie. Met de huidige moderne hulpmiddelen (Excel, Calc) is het praktischer om een formule in plaats van een tabel te gebruiken, ook als deze formule ingewikkeld is.

De regel van 400 (Rule of 400) In plaats van een tabel, kunnen we ook een lineair verband gebruiken. De 240 ratingpunten in de ratingtabel komen overeen met een plusscore van 30%. Een plusscore van 50% komt overeen met 400 punten. Een ratingsysteem gebaseerd op dit eenvoudige lineaire verband wordt ook wel "de regel van 400" of "algoritme of 400" in het Engels genoemd. Bijvoorbeeld: In het afgelopen SNA open toernooi (2012) heeft Georgiev 13 punten uit negen wedstrijden gescoord. Zijn plus-score ten opzichte van de 50% is (13-9) / 13. De bijbehorende ratingprestatie wordt dan ((13-9) / 9) × 400 = 177 punten. Deze prestatie is relatief ten opzichte van de "gemiddelde" rating van de tegenstanders. Om de prestatie op zijn waarde te kunnen schatten, moeten we uiteraard kijken naar het ratingniveau van de tegenstanders.

Het lineaire verband tussen scorepercentage en rating is: scorepercentage × 800 - 400. Dit is gelijk aan: ((scorepercentage - 50%) / 50%) × 400. Merk op dat (scorepercentage - 50%) gelijk is aan de plusscore. De plusscore is gelijk aan 0,5 × (Gewonnen partijen -/- Verloren partijen) / Aantal partijen. De formule wordt dan: ((Gewonnen partijen -/- Verloren partijen) / Aantal partijen) × 400.

De regel, [-400, +400] = 100%, is natuurlijk niet heilig: Jeff Sonas heeft een ratingsysteem ontwikkeld op basis van [-425,+425] = 100% (Chessmetrics).

1. PR varianten

PR - Offset op gemiddelde

Het niveau van de door de tegenstander gespeelde partijen tegen Georgiev was gemiddeld 2300 ratingpunten. De performancerating van Georgiev in het SNA-toernooi wordt dan 2300 + 177 = 2477. Wat iets beter is dan zijn FMJD rating: 2445. In een ratingsysteem zal de prestatie van een speler, met een zekere vertraging (op basis van de verversingsfactoren K), doorgevoerd worden. Bij het bepalen van de performancemeting speelt dat verder geen rol.

Deze methode heet "Offset op gemiddelde" of "Offset on Average". De methode, voorgesteld door Elo, wordt gehanteerd door KNDB, FMJD en FIDE voor het bepalen van de performancerating. Deze methode heeft de charme van de eenvoud. Maar er is ook een keerzijde: de methode is gevoelig voor uitschieters. De relatie tussen rating en verwacht resultaat is niet noodzakelijk lineair. Zwakke spelers kunnen het gemiddelde zover naar beneden trekken, dat dit niet meer gecompenseerd wordt door een overwinning tegen deze spelers. Om dit effect tegen te gaan wordt in het bepalen van de rating (niet de PR!) door de FIDE de volgende regel gehanteerd:

Rule of 400 Points Bij het verwerken van de uitslagen in het ratingsysteem van de FIDE worden ratingverschillen groter dan 400 punten afgekapt: *FIDE handbook B 02. 8.0 The working of the FIDE Rating System*.

(8.54) A difference in rating of more than 400 points shall be counted for rating purposes as though it were a difference of 400 points.

De historische achtergrond van deze regel is: [4].

> John Nunn, Grandmaster, mathematician: This rule was introduced for a simple reason: to prevent players losing Elo points by winning a game. If one player in a tournament is rated far below the others, then including that player can lower the average rating of your opponents by so much that your expected score is increased by more than one point. Then beating that player will leave you worse off than if you had not played him at all. This is not just an academic situation. For very strong players it could easily happen in cases where, for example, a strong tournament includes a 'local player' who is much weaker than the others, or in Olympiads where your first round opponent was relatively weak.

De regel wordt uitsluitend toegepast op het ratingverschil van de sterkere speler, en is een bescheiden bron van ratinginflatie.

Dit stamt uit de tijd dat de rating met de hand werd berekend op basis van gemiddelden en scorepercentage. Deze regel kan misbruikt worden door ratingpunten te sprokkelen tegen zwakkere spelers. De Nederlandse tennisbond lost dit op door winstpartijen van een sterke speler tegen een te zwakke speler niet mee te tellen. Winst en remise van de zwakkere speler tellen wel mee.

In moderne ratingsystemen wordt de rating stapsgewijs (K-factor) aangepast op basis van individuele partijen, en op basis een S-vormige asymptotische verwachtingsfunctie tussen 0 en 100%. Ratingverlies door winst of ratingwinst door verlies is onmogelijk. Daarentegen wordt de performancerating (TPR) van de FIDE bepaald op basis van de gemiddelde tegenstanderrating (Average Opponent Rating), de behaalde score, en de rating tabel. Zie: *FIDE Handbook, B. Permanent Commissions, 01. International Title Regulations (Qualification Commission)*, 1.48 Performancerating (Rp). Het is merkwaardig dat het voorschrift om ratingverschillen te beperken hier ontbreekt.

PR - Bijsturing per partij (game by game)

Lijst Prestatie Meting KN Schaakbond (LPR), individuele Ratingperformance Nederlandse Dambond (iRp) In het handboek *Rekenregels KNSB Ratingsysteem* vinden we:

> De LPR is die rating waarvoor zou gelden dat het totaal van de te verwachten scores (Wx op basis van de LPR) het totaal van de werkelijk behaalde scores het dichtst benadert. Hierbij wordt bij een 0% of 100% score één fictieve "remise tegen zichzelf" (Ro) toegevoegd.

In *nieuwe rekenregels* wordt het zo verwoord:

> iRp = Prestatierating waarbij de som van de normscores tegen de individuele tegenstanders exact gelijk is aan het aantal behaalde punten. Bij een 0% of 100% score wordt een fictieve remise tegen een speler met rating Ro toegevoegd.

Er bestaat in het algemeen (zie hier voor een uitzondering) geen analytische formule om de LPR te bepalen. In plaats daarvan kunnen we een methode gebruiken die op het middelbaar onderwijs toepasselijk "inklemmen" wordt genoemd. Deze methode werkt uitsluitend als de te berekenen waardes begrensd zijn. Daarom worden de 0% en 100% scores geëlimineerd door voor deze spelers een fictieve remise tegen de eigen rating in te voeren. De KNDB, KNSB gebruiken de iRP, respectievelijk de LPR om extreme ratingwijzigingen te limiteren.

PR voor 0% en 100%

Als de verwachtingsfunctie lineair is, dan zullen de ratingverschillen altijd begrensd zijn. We beperken ons tot de situatie waarin de verwachtingsfunctie asymptotisch loopt tussen de 0% en 100%. De verwachtingsfunctie nadert de 0% en 100% willekeurig dichtbij, maar er is geen eindige rating met een verwachting van 0% of 100%. Als de rating door iteratie wordt bepaald dan gedraagt een onbegrensde PR zich als een "zwart gat" waar alle correcties in gezogen worden. De oplossing zal dan niet convergeren. Een remedie is om de PR van de 100%, 0% scores te initialiseren met +∞ en -∞ respectievelijk. Als ∞ voldoende groot wordt gekozen dan zal binnen de gegeven nauwkeurigheid, de verwachte score op basis van een oneindig verschil, gelijk zijn aan de werkelijke score. Met als gevolg dat er geen interactie plaats vindt tussen eindige en oneindige ratingwaardes.

In de FIDE tabel wordt de waarde -800, +800 getoond als"notatie conventie". De toepassing is niet onomstreden, zoals uit de volgende discussie blijkt.

Fictieve remise tegen eigen rating De aanleiding in chessbase.com: [4][5]

> "After seven rounds top Czech GM David Navara has scored 7.0 points, i.e. won every game. This extraordinary result is evaluated by most rating calculators as a 3241 performance. But there are problems with the arbitrary addition of a few hundred points in the case of a 100% score. After discussion with experts we have decided to implement a new algorithm in the next version of ChessBase."

De KNSB / Chess Base oplossing:

> "fred, when i did 0%/100% calculations, i threw a draw in with himself, and did the

> normal calculation. it is not as phony, gives more realistic numbers and rewards lesser rated players less than higher rated players. (eg it depends on his own rating.) anyway, i think it is a much better algorithm and since you expect an even score playing yourself, it seems well founded in theory. (Ken Thomson)"

Alternatief voor een fictieve remise tegen eigen rating Het nadeel van deze oplossing is dat er een element wordt ingebracht, namelijk de eigen rating, dat los staat van de gespeelde partijen. De speler heeft namelijk niet gespeeld tegen zichzelf.

(Zie discussie in Chess.com: Ken Thompson’s 100% / 0% performance rating is flawed)[4]

We starten met de opmerking dat een 100% rating ‘oneindig’ is. Anders gezegd: er zijn blijkbaar te weinig partijen (=n) gespeeld om een eindige rating vast te stellen. De gedachte is nu: kunnen we voor deze rating een goede ondergrens bedenken? Dat kan: we verminderen de 100% score met één remise en bepalen op basis van deze score de ondergrens.(AMcHarg in discussie Chess.com). De ontbrekende remise kunnen we waarderen als plusremise boven de gemiddelde score, benaderd door een lineair verband (raaklijn in x = 0): 100% ≈ 700 ratingpunten.

Samengevat:

- PR(n uit n) = PR(n - 0,5) + 700 × 0,5 / n
- PR(0 uit n) = PR(0 + 0,5) - 700 × 0,5 / n

De eerste term is de ondergrens van de PR. De tweede term is de PR van een plusremise.

Voorbeelden 100% score David Navara Czech Championship 2010

Toegepast op David Navara na 7 uit 7.

Fictieve remise Offset	Gemiddelde tegenstanderrating inclusief eigen rating Percentage inclusief extra remise Dp uit FIDE tabel 8.1a in *Handbook 02. FIDE Rating Regulations* 100% Rating FIDE tabel met extra draw	2475,9 94% 444 2920	2303, 2401, 2479, 2489, 2419, 2518, 2480, 2718 (himself) 7,5 / 8 bij 94% 2476 + 444
LPR	Inclusief remise tegen eigen rating	2949	Gauss, sigma = 2000 / 7
Alternatief Offset	Gemiddelde tegenstanderrating Dp uit FIDE tabel 8.1a in *Handbook 02. FIDE Rating Regulations* Percentage score minus één remise Ratingwaardering voor één remise boven 50% 100% rating, alternatieve bepaling	2441,3 93% 422 50,0 2913	2303, 2401, 2479, 2489, 2419, 2518, 2480 6,5 / 7 bij 93% 350 / 7 2441 + 422 + 50
Alternatief Bijsturing	Gemiddelde tegenstanderrating Score minus één remise PR Ratingwaardering voor één remise boven 50% 100% rating, alternatieve bepaling	2441,3 6,5 2871 50 2921	7 - 0,5 Bijsturing 350 / 7 2871 + 50

Het resultaat van het voorstel wijkt in dit voorbeeld niet ver af van de Ken Thomson werkwijze, maar het verschil is dat de eigen rating geen rol speelt.

Zie hier voor een uitwerking van de secant methode.

PRi - De independent PR

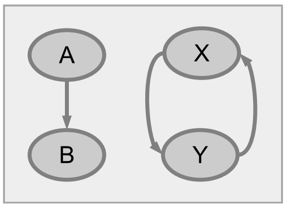
Tot nu toe hebben we de prestatierating bepaald ten opzichte van de initiële rating van de tegenstander. De PR waartegen wordt gespeeld, blijft constant en verandert niet gedurende de bepaling van de prestatiemeting. Een alternatief is dat we de PR bepalen, niet op basis van een externe rating, maar op basis van de PR. Op deze manier wordt de PR onafhankelijk van het externe ratingsysteem. De definitie wordt dan:

> De PRi is die rating waarvoor zou gelden dat het totaal van de te verwachten scores (Wx op basis van de PRi) het totaal van de werkelijk behaalde scores het dichtst benadert.

In een extern ratingsysteem zullen de ratingverschillen altijd begrensd zijn. Als we de performance berekenen over een beperkt aantal wedstrijden, kunnen onbegrensde ratingverschillen voorkomen, bijvoorbeeld in het eenvoudige geval van één wedstrijd waarin speler A wint van speler B. Het voorkomen van onbegrensde ratingverschillen maakt het berekenen van de PRi complexer dan het berekenen van de LPR.

Onbegrensde ratings en grafentheorie

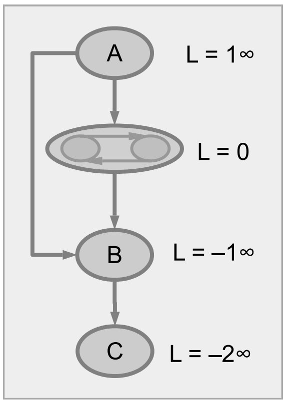
> Onbegrensde ratingverschillen kunnen optreden zonder 0% of 100% scores: A speelt remise tegen B, C speelt remise tegen D, A wint van C.



Als speler A wint van speler B, of als speler X remise speelt tegen speler Y, dan kunnen we ons dat grafisch voorstellen in de vorm van een gerichte graaf (digraph).

Het zal duidelijk zijn dat in dit eenvoudige voorbeeld de PRi van A en B enerzijds, en X en Y anderzijds, onafhankelijk zijn van elkaar. We noemen A en B zwak verbonden (weakly connected). X en Y zijn zwak en daarnaast ook sterk verbonden (strongly connected): er loopt niet alleen een pad van X naar Y, maar ook van Y naar X. We zeggen ook: X en Y zijn verbonden via een lus, of X en Y zijn wederzijds bereikbaar door een uitslagenpad. Als A en B (A is ongelijk aan B, en A en B verbonden) niet wederzijds bereikbaar zijn, dan is het ratingverschil tussen A en B onbegrensd. Omgekeerd, als A en B wederzijds bereikbaar zijn, dan is het ratingverschil tussen A en B begrensd: A en B zijn ‘bijna’ even sterk. De maximale groep spelers die zwak / sterk verbonden met elkaar zijn, vormen een Weakly / Strongly Connected Component (WCC / SCC). Een SCC wordt ook wel een "priemtoernooi" genoemd (Ernst Zermelo, 1928).

> Ratingsverschillen (op basis van een S-vormige verwachtingsfunctie) tussen twee spelers zijn begrensd dan en slecht dan als twee spelers tot dezelfde SCC (priemtoernooi) behoren.



Uitgaande van de uitslagengraaf van een toernooi, kunnen we een nieuwe gerichte graaf construeren, waarbij de SCC's de punten vormen van de nieuwe graaf, en de pijltjes zijn gebaseerd op de onderliggende uitslagen. De nieuwe graaf heeft geen lussen (DAG = Directed Acyclic Graph). Het ratingverschil tussen de verbonden punten in deze graaf is onbegrensd. De PRi van de punten is eenvoudig vast te stellen. Onder "level" verstaan we het maximaal aantal stappen naar de bodem. Een oplossing is dan: L = (level + C) × w, waarin w een "voldoende" groot getal is, gegeven de nauwkeurigheid waarin wij willen werken (w = 'oneindig'). C is een 'willekeurige' constante die per zwak verbonden component vrij gekozen kan worden. In het voorbeeld rechts: -2.

Het bepalen van de PRi komt neer op drie stappen:

1. Binnen alle zwak verbonden componenten: het vast stellen van de sterk samenhangende componenten, de onderliggende structuur (=quotient graph, of condensation[10]) en daarvan afgeleid de PRi-basis (L) van alle sterk samenhangende componenten, zoals we zien in de nevenstaande figuur.
2. Binnen de sterk samenhangende componenten: het bepalen van de PRi door iteratie. De oplossing is L + PRi.
3. Optioneel: voor één level L: het normeren van de PRi-basis ten opzichte van een extern ratingsysteem.

In rapid toernooien, met relatief weinig rondes, b.v 9, grote krachtsverschillen, en tientallen deelnemers, kunnen gecompliceerde structuren voorkomen, tot 5 á 6 verschillende niveaus.

Meer grafentheorie (WCC, SCC, Level)

Alle spelers die (zwak) verbonden zijn met elkaar via een uitslagenpad, noemen we een Weakly Connected Component (WCC). Het bepalen van de Weakly Connected Components (WCC's), de Stronly Connected Components (SCC's) en de Levels doen we op basis van een Dept First Search (DFS). Het algoritme is afkomstig vanRobert Endre Tarjan. Een heldere uitleg vinden we hier [6]. De pseudocode bepaling SCC vinden we hier. Een Excel toepassing vinden we hier.

PRi uitgebreid met virtuele speler (PRiV) Een extra fictieve remise van een speler tegen zichzelf heeft geen effect op het bepalen van de PRi. Het ratingverschil tussen een speler en zichzelf is per definitie 0. Daarom is de fictieve score gelijk aan de verwachte score. We kunnen door een kunstgreep echter afdwingen dat de groep sterk samenhangt: we voegen een virtuele speler toe. De virtuele speler speelt tegen alle andere spelers een fictieve remise. Merk op dat de volgorde van de PRi en de PRiV van elkaar kunnen verschillen: De PRi maakt geen verschil tussen één of meerdere overwinningen of nederlagen (pijltjes in de graaf) tegen spelers uit een ander level. In de PRiV speelt het aantal partijen wel een rol.

Normeren PRi met een extern ratingsysteem. Omdat de verwachte score bepaald wordt door de ratingverschillen, is de oplossing op een constante na uniek. We kunnen de oplossing uniek maken door het gemiddelde op een bepaald niveau vast te pinnen, bijvoorbeeld op het niveau van een extern ratingsysteem. Maar gewoon 0 kan ook. De berekening van de PRi is uitsluitend afhankelijk van de gespeelde partijen. In de situatie dat spelers ongelijke tegenstanders ontmoeten, kan de PRi gebruikt worden als een "eerlijk" (eventueel aanvullend) criterium om de ranglijst vast te stellen. Een voordeel boven Buchholz is dat de PRi het niveau van de tegenstanders van de tegenstanders incalculeert.

Normeren betekent dat we bij de PRi een constante optellen, zodanig dat de PRi's vergeleken kunnen worden met een extern ratingsysteem.

Gemiddelde sterkte van de groep

Alle ratings in het externe ratingsysteem worden begrensd verondersteld. Stel dat speler A wedstrijden speelt tegen de spelers B1, B2. De gemiddelde sterkte van deze groep is de gemiddelde externe rating van A, B1, B2. Voor de prestatie van speler A maakt het niet uit of hij één tegenstander meerdere keren ontmoet, of dat hij meerdere tegenstanders ontmoet met dezelfde externe rating. Daarom beschouwen we van alle gespeelde partijen de bijbehorende externe rating. De externe rating die 50% scoort tegen deze verzameling van externe ratings is de ‘gemiddelde’ sterkte van de groep. Dit is bij benadering het rekenkundig gemiddelde over alle uitslagen. Dit is weer gelijk aan het gewogen gemiddelde van de externe ratings van de spelers. De weegfactor is het aantal gespeelde partijen per speler. Samengevat: de gemiddelde rating moet bepaald worden over de ratings van de gespeelde partijen, en niet over de ratings van de deelnemers.

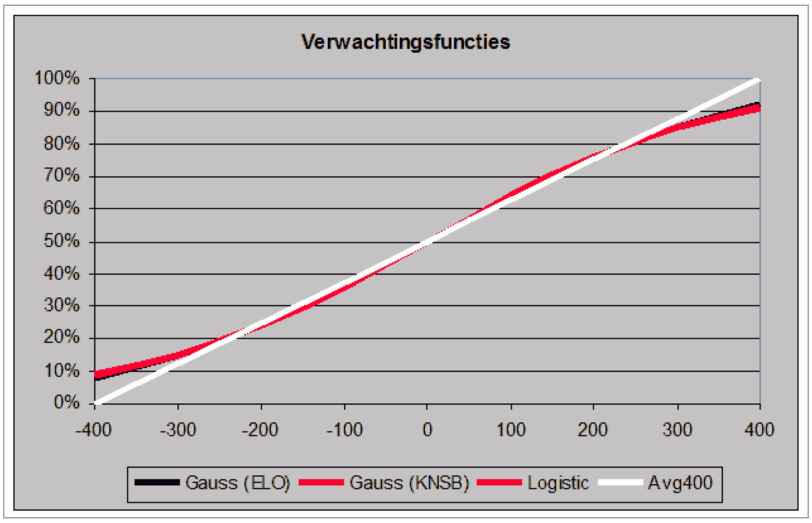
Varianten normeren

1. Wanneer we de PRi zouden willen gebruiken in plaats van Buchholz of Sonneborn-Berger, dan is de relatie met een extern ratingsysteem overbodig. In dat geval kunnen we normeren op gemiddelde 0.
2. Gebruikelijk is om te normeren op basis van de gemiddelde sterkte van de groep: Gemiddelde PRi = Gemiddelde externe rating gespeelde partijen.
3. Als er een virtuele speler is, dan kunnen we de PRi van de virtuele speler ook gelijk maken aan het groepsgemiddelde van de externe rating (of 0).
4. Als er een speler is die, en veel heeft gespeeld, geen extreme score heeft, en een betrouwbare externe rating heeft - veel recent gespeelde partijen-, dan kan de PRi van deze speler gebruikt worden als referentie voor de normering: PRi(speler) = Externe rating(speler).

Analytische bepaling volledig rond-toernooi Als spelers een volledig toernooi spelen, en we hanteren een lineaire verwachtingsfunctie, bv. het traject [-400, +400] rating punten = 100%, dan kan de PR eenvoudig analytisch bepaald worden:

1. We introduceren een extra ronde waarin alle n spelers remise tegen zichzelf spelen. Deze extra remise heeft geen effect op de PRi van de spelers. In de PRi is het ratingverschil van een speler tegen zichzelf altijd 0. De verwachte score van 50% is gelijk aan de fictieve remise.
2. Gevolg: de gemiddelde tegenstander PRi van alle spelers is gelijk aan de gemiddelde PRi van de spelersgroep. Die stellen we voor het gemak op 0.
3. We bepalen nu voor alle spelers i de performancerating PRi = ((Wi - Li) / n) × 400 + 0, waarbij Wi, Li het aantal gewonnen, verloren partijen is.
4. Indien gewenst normeren we deze rating ten opzichte van een extern ratingsysteem.

2. De verwachtingsfuncties (nog meer wiskunde)



Randvoorwaardes Voorwaarde voor een unieke oplossing van de PRi is dat de verwachtingsfunctie continu en strikt monotoon stijgend is. In dat geval is de inverse relatie van E(x) een functie, dat wil zeggen dat er bij één scoringspercentage (p), één ratingwaarde (d_p) hoort. Tabellen (stapfunctie) voldoen niet aan de eis van continuïteit. Afgekapte functies, bv. door de "Rule of 400 Points", zijn niet monotoon.

Klassiek Elo De door Árpád Élő bedachte verwachtingsfunctie is de cumulatieve normale verdeling, of Gauss verdeling, met verwachtingswaarde $\mu = 0$ en standaardafwijking (sigma) $\sigma = 200\sqrt{2}$ (=282,84). De hoek van de raaklijn in x = 0 is gelijk aan: $1 / (\sigma\sqrt{2\pi})$. Het bereik van de raaklijn, de lengte van de x-as tussen 0% en 100%, is $(2 \times 200 \times \sqrt{\pi}) = 708{,}98$.

De "Standaard" verwachtingsfunctie (cumulatieve logistische verdeling) Stel dat spelers A_r, A_s (onbekende) speelsterktes u_r en u_s hebben. Deze speelsterktes zijn positief en stellen de onderlinge winst / verlieskansen voor van deze twee spelers. Dan is in het door Zermelo (1928) bedachte, en daarna vele malen opnieuw herontdekte (o.a. door Bradley-Terry, paired comparisions methods) model de kans dat speler A_s wint van speler A_r gelijk aan $Z(u_r, u_s) = u_r / (u_r + u_s)$. De kans dat speler A_s wint van A_r is gelijk aan $u_s / (u_r + u_s)$. Beide kansen tellen op tot 1.

We kunnen nu de kansen u_r en u_s herschrijven als macht van de natuurlijke logaritme e. De kans dat speler A_s wint van speler A_r wordt dan: $e^{v_r} / (e^{v_r} + e^{v_s})$. Hetgeen gelijk is aan de bekende (Verhulst) logistische formule: $1 / (1 + e^{-(v_r - v_s)})$. Een bijkomend voordeel is dat deze functie qua structuur veel eenvoudiger is dan de cumulatieve gaussverdeling. Deze verwachtingsfunctie wordt gebruikt door de USCF (United States Chess Federation).

- Functie F wordt geëvolueerd in punt $x = T_r - T_s$. T_r, T_s is de performancerating van speler r, respectievelijk s.
- $F(x) = 1 / (1 + e^{-x})$
- $F(0) = 0{,}5$
- $F(x) + F(-x) = 1$, voor de afgeleide functie geldt:
- $F'(x) = e^x / (1+ e^x)^2$, en ook
- $F'(x) = F(x) \times F(-x)$
- $F'(x) = F(x) \times (1 - F(x))$, meer in het bijzonder: $F'(0) = 0{,}25$. Het bereik van de raaklijn in x = 0 tussen 0% en 100% is 4.

- $F'(x) = F'(-x)$, De tweede afgeleide is:
- $F''(x) = -e^x (e^x - 1) / (e^x + 1)^{\wedge 3}$, en ook
- $F''(x) = F'(x) \times (1 - 2.F(x))$, De inverse functie van F is:
- $F^{-1}(p) = Ln(p / (1 - p))$, Dit is de zogenaamde Logit(p) functie. Ln() is de natuurlijke logaritme (grondtal is het Euler getal e).

De cumulatieve logistische verdelingsfunctie met verwachtingswaarde μ, en parameter s kan geschreven worden als:

- $E(x) = 1 / (1 + e^{-(x-\mu)/ s})$, waarbij de standaardafwijking sigma gelijk is aan:
- $\sigma = \pi / \sqrt{3} . s$
- Het bereik van de raaklijn in x = 0 is gelijk aan 4 × s

Om deze functie de zelfde hellingshoek te geven als de klassieke Elo functie moet de x-as met een factor $s = (400\sqrt{\pi}) / 4$ verlengd worden. Dan wel $(400 / (4 / \sqrt{\pi}))$. In werkelijkheid wordt ook hier een benadering gebruikt, namelijk s = 400 / ln(10). Zodat we de verdelingsfunctie kunnen schrijven als:

- $E(x) = 1 / (1 + e^{-\ln(10)\, x / 400})$. Omdat $e^{\ln(10)} = 10$, is dit gelijk aan:
- $E(x) = 1 / (1 + 10^{-x / 400})$. Of geschreven in basis $D = \sqrt{10}$ en klasse interval C = 200 wordt dit:
- $E(x) = 1 / (1 + D^{-x / C})$

Deze benadering van de gaussverdeling (ELo 1976, 8.3) is niet alleen cosmetisch, maar sluit beter aan bij de gaussverdeling (zie grafiek). Uit de voorgaande formules volgt:

- s = 400 / ln(10) = 173,7 (Elo elongatie van de x-as)
- σ = 315.
- Het bereik van de raaklijn in x = 0 is gelijk aan 694,87.

De inverse functie van E(x) is:

- $E^{-1}(p) = Logit(p) \times s$

AVG400

- E(x) = x / 800 + 50%
- $E^{-1}(p) = 800.p - 400$ of
- $E^{-1}(p) = 800.(p - 50\%)$ of
- $E^{-1}(p)$ = ((gewonnen - verloren) / gespeeld) . 400

Ten opzichte van de asymptotische S-vormige verwachtingsfuncties zijn er een aantal voordelen te noemen:

- De rating is altijd begrensd, ook bij 0% en 100% scores, De berekening van de PRi is onafhankelijk van de sterk verbonden groepen
- Rekenkundig gemiddelde = Rating gemiddelde. De verwachting van het rekenkundig gemiddelde is 50%.
- De rating range (verschil tussen minimum en maximum) is beperkter
- Convergentie in één stap (=matrix inversie) volgens de Newton-Raphson methode.
- Eenvoudig toe te passen

Als de verwachtingsfunctie groter dan 100% wordt, zal er ook bij winst ratingverlies optreden. Of bij verlies ratingwinst als de verwachtingsfunctie negatief wordt. Hetgeen behoorlijk contra-intuïtief is. En strijdig met het rechtvaardigheidsgevoel. Of gewoon onacceptabel als de PR het criterium is om individuele winnaars in teamwedstrijden aan te wijzen, zoals tijdens de Schaak-olympiade. Wanneer we de PR gebruiken om in een toernooi spelers met een gelijk aantal punten een volgorde te geven, dan is dit argument minder sterk. De speler is makkelijk aan de punten gekomen, en het is terecht dat dit op de PRi een matigend effect heeft. Een groot voordeel is dat het verschil tussen minimum en maximum PRi kleiner wordt, waardoor de lineaire PRi er realistischer uitziet.

Lineair versus Asymptotisch

Als we het lineaire verband doorzetten dan zal het resultaat onder de 0% of boven de 100% uitkomen. Dit is in de damscore een onmogelijk resultaat. In principe is dit geen probleem (voor de stoutmoedige van geest): tenslotte is de wortel uit -1 ook onmogelijk. Percentages boven de 100% kunnen betekenen: speler A wint met gemak van speler B.

Wanneer twee spelers ongeveer even sterk zijn, dan is een match van 10 á 20 partijen voldoende om dit betrouwbaar vast te stellen. Maar stel dat het verschil 99.9% tegen 0,1% is. Dan zal de zwakke speler gemiddeld 500 partijen nodig hebben om één remise te scoren. We begeven ons dan in het gebied van de statistiek van de zeldzame gebeurtenissen: hoeveel soldaten verongelukken er door een trap van een paard in een bepaald tijdsinterval (Auguste Poisson).

Exotische verwachtingen Een ‘nette’ verwachtingsfunctie voldoet aan de volgende eisen:

- E is continu en differentieerbaar
- E(0) = 50%
- E(x) + E(-x) = 1
- E′(x) > 0 (E is strikt monotoon)
- E′(x) = E′(-x)

Tabellen + lineaire extrapolatie Tabellen werden oorspronkelijk gebruikt om spelers de gelegenheid te geven de ratingresultaten zelf te bepalen.

3. PR berekenen

Basismethode "Kees Dekker"[1][5]

De (onafhankelijke) PR van speler s, kan bepaald worden als de limiet van de opeenvolgende benaderingen $T_s^{(n)}$, n = 0, 1,..., We starten met een willekeurige beginwaarde $T_s^{(0)}$, bijvoorbeeld de eigen rating of een willekeurige tegenstanderrating. Op basis $T_s^{(0)}$ en de tegenstanderratings berekenen we de verwachte score, zeg $We_s^{(0)}$. Waarbij we de volgende keuze kunnen maken:

1. (Dependent PR) De tegenstanderratings R_k zijn vast, en veranderen niet gedurende de iteratie. $R_k^{(n)} = R_k^{(0)}$. De verwachte score is een monotone functie van de eigen rating T_s. De berekende PR heeft geen effect op de berekening van de PR van de overige spelers.
2. (Independent PR) De tegenstanderrating $R_k^{(n)}$ in iteratiestap (n+1) is gelijk aan de berekende PR van speler k in de vorige iteratie slag: $R_k^{(n)} = T_k^{(n)}$. Het verschil van de independent PR tussen twee spelers is onafhankelijk van de initiële keuze van de tegenstanderratings $R^{(0)}$.

We stellen:

- $DeltaPerc_s = (W_s - We_s) / N_s$, het verschil tussen de werkelijke en verwachte score als percentage van de maximaal mogelijke score
- W_s, de gerealiseerde score van speler s
- $We(T_s) = \Sigma_k E(T_s - R_k) N_{sk}$, de verwachte score van speler s tegen zijn tegenstanders, op basis van verwachtingsfunctie E, eigen rating T_s en tegenstanderrating R
- N_{sk}, het aantal gespeelde partijen tussen spelers s en k
- $N_s = \Sigma_k N_{sk}$, de maximale score

De onderliggende aanname is dat we de verwachtingsfunctie E(x) mogen vervangen door de raaklijn aan de verwachtingsfunctie in x = 0. De te bepalen performancerating T_s van speler s is de limiet van de volgende iteratie:

> $T_s^{(n+1)} = T_s^{(n)} + \Delta T_s^{(n)}$
> Op basis van de raaklijnbenadering, 100% ≈ 1 / E′(0), stellen we:
> $\Delta T_s^{(n)} = DeltaPerc_s^{(n)} \times (1 / E'(0))$

Stopcriteria iteratie in Sevilla [1]

- Als het aantal iteraties groter wordt dan een afgesproken maximum
- Als voor alle spelers s de iteratie tolerantie: $|T_s^{(n+1)} - T_s^{(n)}|$, kleiner wordt als een afgesproken waarde (=5)
- Om de independent PR stabiel te bepalen zou de som van alle fouten beperkt moeten worden. Zie Stopconditie NR-iteratie. Het aantal iteratiestappen zou dan onacceptabel groot worden.

Beperken stapgrootte Raaklijn-methodes kunnen makkelijk ontsporen. Dit kunnen we tegengaan door de stapgrootte te limiteren. Na r-rondes is de minimale (> 0%), respectievelijk maximale score (< 100%) 0,5 en r-0,5 punten, met verwachte scores: E(0,5 uit r) en E(r - 0,5 uit r). In de eerstvolgende ronde is het maximale ratingverschil: E(r - 0,5 uit r) - E(0,5 uit r). Dit is in het

Elo-model ongeveer gelijk aan:

- Round(ln(r) + 1) × σ. We kunnen de stapgroote ook beperken op basis van de raaklijn aan de verwachtingsfunctie:
- Round(((r - 0,5)/r) / E'(0)) × σ. Dit is ongeveer gelijk aan 4 × σ
- Kies het maximum van voorgaande alternatieven

Basismethode en de independent PR Noodzakelijke voorwaarde is dat alle te bepalen performanceratings begrensd zijn.

Tijdens het iteratie proces verandert de PRi van de tegenstanders voortdurend. Of de oplossing uniek is, en onder welke voorwaarden, is een interessante opgave. (Bij nader inzien opgelost door Ernst Zermelo in 1928)

Deze methode werkt niet bijzonder goed voor de independent PR. De convergentie in de buurt van de oplossing wordt steeds trager. De oplossingsrij kan divergeren, of oscilleren (het ping-pong effect). Divergeren/oscilleren kunnen we voorkomen door voor de versterkingsfactor 1 / E′(0) een kleinere waarde te kiezen (step-halving, ridging). Dit vertraagt dan wel weer de convergentie.

Forward substitution (uit Gauss-Seidel-iteratie)

> De convergentie voor de independent PR wordt sneller (33%) als we een idee gebruiken uit de zogenaamde Gauss-Seidel iteratie: gebruik bij het bepalen van de verwachte score van speler i tegen speler k de meest recent berekende rating van speler k.

Floating point precision Zet alle elementen van de verschilvector kleiner dan de zwevende komma nauwkeurigheid op 0.

Convergentie en verschuiving Independent PR Tijdens het berekenen van de independent PR kan er een verschuiving optreden: $T^{(n+1)} = T^{(n)} + c$. Om bijvoorbeeld de convergentie te kunnen bepalen is het noodzakelijk de constante verschuiving te elimineren. We stellen:

- $\Sigma\, T^{(n+1)} = \Sigma\, T^{(0)}$, of we verschuiven de verschilvector ΔT zodanig dat:
- $\Sigma\, \Delta T = 0$

Bepaling van de dependent PR (univariate, in één dimensie)

Als de PR berekend wordt tegen vaste tegenstanderratings R_i, dan is de verwachte score een monotone functie van de eigen rating. De oplossing kan dan per speler, en onafhankelijk van de overige deelnemers, bepaald worden door bisectie of de antieke secant methode.

In tegenstelling tot geavanceerdere methoden, wordt uitsluitend de verwachtingsfunctie gebruikt en niet de afgeleide van deze functie of (een benadering van) de hellingshoek in x = 0 (bv. 800). Implementatie is compact (enkele regels). Bij passende initialisatie zijn minder dan 5 iteraties nodig om een nauwkeurigheid van 1% te bereiken.

Secant iteratie Bepaal de performancerating T van speler s als limiet van de volgende iteratie:

- $T^{(-1)} = R_s$, $T^{(0)} = R_s - \ln(We / W) \times \sigma$, waarbij W > 0, We > 0 en,
- f = We(T) - W, het verschil tussen verwachte en werkelijke score van speler s op basis van eigen rating T
- $T^{(n+1)} = T^{(n)} - ((T^{(n)} - T^{(n-1)}) / (f^{(n)} - f^{(n-1)})) \times f^{(n)}$
- Stel de maximale stapgrootte op bijvoorbeeld 4σ. Of in plaats van 4: ln(aantal rondes / 0,5 + 1), afgerond op een geheel getal. In het onwaarschijnlijke geval dat de begrensde waarde gelijk wordt aan $T^{(n)}$, stellen we $T^{(n+1)}$ gelijk aan het midden van $T^{(n)}$ en $T^{(n-1)}$

Zie hier voor een uitwerking van de secant-methode.

Newton-Raphson iteratie Dit is een methode om een nulpunt van een functie f(x) van **R** → **R** te bepalen door het volgende iteratie proces:

- $x^{(n+1)} = x^{(n)} - f(x^{(n)}) / f'(x^{(n)})$. We gaan er van uit dat een functie f in de buurt van het punt $x^{(n)}$ zich gedraagt als de raaklijn aan f in het punt $x^{(n)}$. Of vooruitlopend op meer dimensies:
- $x^{(n+1)} = x^{(n)} - [f'(x^{(n)})]^{-1} \times f(x^{(n)})$

Wanneer een speler s met rating T, speelt tegen spelers met rating R = (R_1, R_2…), en W punten scoort, dan is de dependent PR een nulpunt van de functie f(T) = 0, waarbij f(T) gedefinieerd wordt door:

- f(T) = We(T) - W. De verwachte score van speler s, We(T) is gelijk aan:
- $We(T) = \Sigma_k E(T - R_k) N_{sk}$, de ratings R_i blijven constant gedurende het iteratie proces. N_{sk} is het aantal partijen tussen spelers s en k. De afgeleide functie is dan,
- $f'(T) = -\Sigma_k E'(T - R_i) N_{sk}$, s ≠ k, als we uitgaan van de standaard verwachtingsfunctie, dan geldt voor de afgeleide functie:
- $E'(T - R_k) = E(T - R_k).(1 - E(T - R_k))$, E is de logistische ("standaard") verwachtingsfunctie.

De iteratie voor speler s wordt:

- $T^{(0)} = R_s$
- $T^{(n+1)} = T^{(n)} - f^{(n)} / f'^{(n)}$
- Beperk de maximale stapgrootte, zoals besproken in de secant iteratie.

De basismethode is een vereenvoudigde versie van de Newton-Raphson methode. De vereenvoudiging bestaat hieruit dat $f(x^{(n)}) / f'(x^{(n)})$ vervangen wordt door $f(x^{(n)}) / f'(0)$, waarbij $f(x^{(n)})$

gelijk is aan W - We($x^{(n)}$) en f′(0) = (N × -E′(0)). Hierin is N het aantal gespeelde partijen. Hieruit volgt: f($x^{(n)}$) / f′(0) = (-(W - We($x^{(n)}$)) / N) / E′(0).

Het algoritme is gevoelig voor de eerste keus. Twee alternatieven zijn:

- Initialiseer op het groepsgemiddelde: alle spelers zijn even sterk. Dit is naar mijn smaak het veiligste. Hoe minder informatie/chaos we in het algoritme stoppen, des te regelmatiger zal het iteratie proces verlopen (In ieder geval geldt dit voor mensen).
- Initialiseer met E^{-1}(% werkelijke score) + groepsgemiddelde, dit is sneller.

Bepaling independent PR (multivariate)

De independent PR speelt zich af in n (= aantal spelers) dimensies en is complexer dan de dependent PR (Kiusalaas, hoofdstuk 4.6). Gegeven is de functie:

- f: $\mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$

De independent PR T is het nulpunt van de functie f, In vector notatie:

- $f(\overline{T}) = \overline{0}$

De functie f(x), $x \in \mathbf{R}^n$, is gedefinieerd als het verschil tussen de verwachte en werkelijke score We(x) - W. We en W zijn vectoren die de verwachte en actuele resultaten bevatten van spelers 1, 2, ...,n. In scalar notatie wordt dit een systeem van n niet-lineaire vergelijkingen:

$f_1(x_1, \dots x_n) = 0$
$f_i(x_1, \dots x_n) = 0$
$f_n(x_1, \dots x_n) = 0$

Waarbij:

- $f_i(x_1, \dots x_n) = \Sigma_k\ E(x_i - x_k)\ N_{ik} - W_i$, N_{ik} is het aantal gespeelde partijen tussen de spelers i, k

Zermelo iteratie Deze methode is stabiel, elegant en convergeert volgens een geometrische rij. In de buurt van het nulpunt wordt de convergentie traag.

- Stel $T_{(j)} - T_{(i)} = s \times (x_{(j)} - x_{(i)})$
- $T^{(0)} = 0$, is een vector bestaande uit $(T_1^{(0)}, T_2^{(0)}, \dots)$
- $T^{(n+1)} = T^{(n)} - \mathrm{DeltaZ}^{(n)}$, en
- $\mathrm{DeltaZ}^{(n)} = \ln(We/W) \times s$, met x-as verlenging s
- Normeer $\Sigma\mathrm{DeltaZ}^{(n)}$ op 0
- Stop indien $||f|| \leq \varepsilon$

Zie hier voor een uitwerking van de Zermelo-methode.

De Gradient Descent methode Dit is een variant op de Newton-Raphson methode in één dimensie. In plaats van een vaste rating R_k wordt de rating van de betreffende tegenstander uit de vorige iteratieslag gebruikt.

- $T^{(0)} = 0$, is een vector bestaande uit $(T_1^{(0)}, T_2^{(0)}, \dots)$
- $T^{(n+1)} = T^{(n)} - \mathrm{DeltaGD}^{(n)}$, en
- $\mathrm{DeltaGD}_i^{(n)} = (We_i^{(n)} - W_i) / (\ \Sigma_{i \neq k} N_{ik}.\ E'(T_i^{(n)} - T_k^{(n)})\ )$, $T_k^{(n)}$ is de rating van de betreffende tegenstander uit de vorige iteratie, en N_{ik} het aantal gespeelde partijen tussen de spelers i, k. Ook als de informatie niet is georganiseerd volgens een matrix, maar bijvoorbeeld volgens het ronde-dossier formaat (in dat geval is N_{ik} altijd 1), dan werkt deze formule.
- Normeer $\Sigma\mathrm{DeltaGD}^{(n)}$ op 0

Deze methode kan makkelijk divergeren.

De methode van Newton-Raphson (multivariate) In deze toepassing is f een functie van n

(=aantal spelers) ratingwaardes naar n verschillen tussen werkelijke en verwachte scores. De independent PR, voorgesteld als vector van n ratingwaardes, is het nulpunt van deze functie: het verschil tussen werkelijke score en verwachte score is nul voor alle spelers.

Het nulpunt van f(x) = We(x) - W is de limiet van de opeenvolgende benaderingen: $x^{(0)} = 0$, $x^{(1)}$, $x^{(2)} \ldots, x^{(n)}, x^{(n+1)}$

- $x^{(i)}$ is een vector van N (= aantal spelers) performanceratings
- $x^{(n+1)} = x^{(n)} - [J_f(x^{(n)})]^{-1} \, . \, f(x^{(n)})$, waarbij x, f(x) kolomvectoren zijn. $[J_f(x^{(n)})]^{-1}$ is de inverse van de [Jacobian matrix]() $J_f(x^{(n)})$ van functie f in $f(x^{(n)})$
- Rij i, en kolom j van de Jacobiaan J_f is de partieel afgeleide van functie f_i naar de variabele x_j: $J_f[i,j] = \partial f_i / \partial x_j$. De diagonaal van deze matrix is gelijk aan de helling van f: ∇_f

$$
\begin{array}{ll}
 & \partial f_1/\partial x_1 \,\ldots\ldots\ldots\, \partial f_1/\partial x_n \\
J_f(x) = & \ldots\ldots\ldots\, \partial f_i/\partial x_i \,\ldots\ldots\ldots \\
 & \partial f_n/\partial x_1 \,\ldots\ldots\ldots\, \partial f_n/\partial x_n
\end{array}
$$

> Inplaats van de afgeleide kunnen we ook het differentieqoutient nemen f(x + h) - f(x-h) / 2.h. Een nadeel is dat de stapgrootte h gekozen moet worden. Een veilige keus is h = s × 0,001. Het differentie quotiënt is symmetrisch gekozen om te garanderen dat E′(x) = E′(-x).

De intuïtie achter deze benadering is:

- De lineaire transformatie op basis van de Jacobian in f(x) is de lineaire benadering van f(x) in meerdere dimensies, te vergelijken met de raaklijn in één dimensie. Vanzelfsprekend werkt deze methode in één stap als de verwachtingsfunctie lineair is (Jeff Sonas).
- De inverse matrix van de Jacobiaan is gelijk aan de Jacobiaan van de inverse functie f^1: $J_f^{-1} = J_{f^{-1}}$
- De oplossing van het oorspronkelijke systeem is niet uniek. Het gevolg is dat de bijbehorende Jacobiaan singulier is. We bespreken nu drie procedures om de oplossing uniek, en de matrix J_f inverteerbaar, te maken.

We kunnen de matrix inversie triviaal maken door alle off-diagonaal elementen op nul te zetten. Dit is de Gradient Descent methode.

Bepalen Jacobiaans (f = We) en parametrisaties

- (P0) Niet geparametriseerd. Rijen van de matrix zijn afhankelijk en de matrix kan niet geïnverteerd worden De determinant van $J_f = 0$.
    - $J_f[i,k] = N_{ik} \, . \, -E'(T_i - T_k)$, $(i \neq k)$, en $E' = \partial E/\partial T_k$. Waarbij N_{ik} het aantal gespeelde partijen is tussen speler i en k.
    - $J_f[i,i] = \Sigma_j \, N_{ij}.E'(T_i - T_j)$, waarbij $E' = \partial E/\partial T_i$, Uit deze formules volgt:
    - $J_f[i,i] = - \Sigma_{k \neq i} \, J_f[i,k]$, en $\Sigma J_f = 0$. (niet inverteerbaar).
- (P1) We kiezen een willekeurige speler, bijvoorbeeld speler n, en vervangen de oorspronkelijke functie $f = (f_1, \ldots, f_n)$ door: $g = (f_1, \ldots f_{n-1})$ en $x_n = 0$. Alle ratings worden ten opzichte van x_n bepaald. Rij n, en kolom n in J_f vervallen. $J_g[i,k] = J_f[i,k]$. i, k < n
- (P2, Mark Glickman) Een beperkt nadeel van vorige methode is dat de norm niet op nul

gehouden wordt. Daartoe kiezen we $x_n = N \times 0 - \Sigma_{i<n}\, x_i$. Zo garanderen we dat de som van alle ratings constant blijft gedurende de iteratie. We elimineren kolom n door de transformatie: $x'_i = x_i - x_n$. De definitie van de nieuwe Jacobiaan $J_g[n-1, n-1]$ wordt:

  - $J_g[i,k] = J_f[i,k] - J_f[i,n]$
  - Een (theoretisch) nadeel van de voorgaande methodes is dat de convergentie afhankelijk wordt van de keuze van de speler n. Dit maakt een analyse van het algoritme complexer.
- (P3) We breiden de functie f uit met een extra dimensie: $f_{n+1}(x_1, \ldots x_{n+1}) = \Sigma_i(x_i - x_{n+1})$, x_{n+1} = C (het te kiezen basisniveau) en $We_{n+1} = 0$. Vervolgens elimineren we de extra dimensie door: $g_i = f_i - f_{n+1}$.
  - De definitie van J_g wordt: $J_g[i,k] = J_f[i,k] - J_f[i,n+1]$, $(i, k \le n)$, Merk op dat $J_f[i,n+1] = -1$.
- Een nadeel van P2 en P3 is, dat alle elementen van de matrix ongelijk aan nul worden.

Bovenstaande formules kunnen dan samengevat worden als:

- (P1) $J_g[\ ,\ ] = J_f[n-1,n-1]$
- (P2) $J_g[i,k] = J_f[i,k] - J_f[i,n]$, waarbij $i, k < n$
- (P3) $J_g[i,k] = J_f[i,k] - J_f[i,n+1]$, waarbij $i, k \le n$

Eigenschappen van de geparametriseerde matrix J_g De matrix J_g (P1, P3) heeft de volgende eigenschappen:

- Als er weinig partijen zijn gespeeld ten opzichte van het aantal spelers, dan is de matrix sparse (dun bevolkt, ijl).
- Reëel en symmetrisch. Alle eigenwaarden van een symmetrische matrix zijn reëel.
- De diagonaal bevat uitsluitend positieve reële getallen. Verder is de matrix strikt diagonaal dominant: $|\ J_g[i,i]\ | > |\ \Sigma_{k \neq i} J_g[i,k]\ |$.
- Uit de welbekende cirkel-stelling van Gershgorin volgt dat alle eigenwaarden positief zijn. De matrix is symmetrisch, positief-definiet (SPD), dat wil zeggen: voor iedere vector $x \neq 0$ geldt dat $x^T A\, x > 0$. Immers $e^T \lambda e > 0$, voor alle eigenwaarden, eigenvectoren (λ, e). En iedere x kan geschreven worden als lineaire combinatie van eigenvectoren.

Een stelsel lineaire vergelijkingen Ax = b, kan efficiënt opgelost worden met "Krylov deelruimte" methoden als de matrix A SPD is. Een voorbeeld van de constructie van de Jacobiaans en de Newton_Raphson iteratie met matrix inversie vind u hier.

Methodes zonder matrixinversie (Krylov subspace methods)

Het oplossen van een stelsel lineaire vergelijkingen door matrixinversie is niet de aangewezen, dat wil zeggen snelste manier om een oplossing te vinden. In de vorige recursieformule kunnen we de term $x^{(n)}$ naar links brengen, Na vermenigvuldigen van linker en rechterkant met $J_f(x)$, ontstaat:

- $J_f(x^{(n)}) . (x^{(n+1)} - x^{(n)}) = -f(x^{(n)})$

Als de matrix symmetrisch positief-definiet (SPD) is, dan heeft het te optimaliseren oppervlakte de vorm van een paraboolachtig kom (Shewchuk, 1994). Dit stelt ons in staat $(x^{(n+1)} - x^{(n)})$ op te lossen met bekende optimalisatiemethodes. De conjugate gradient methode (zie ook Kiusalaas, hoofdstuk 2.7) is in deze situatie een veel gebruikte methode. Binnen de hoofditeratie u = 0, 1, 2 ontstaat een subiteratie t = 0, 1, 2 waarin de delta $(x^{(n+1)} - x^{(n)})$ bepaald wordt als oplossing van een stelsel lineaire vergelijkingen, zoals hierboven aangegeven.

Zij A een matrix, en b een vector. De ruimte $K_n\{A, b\}$ opgespannen door de vectoren {b, Ab, A.Ab, A.AAb ... A^{n-1}} wordt de Krylov-deelruimte genoemd. De inverse matrix A^{-1} is een lineaire combinatie van vectoren uit de Krylov deelruimte. Methodes op basis van Krylov deelruimtes kunnen zeer compact gerealiseerd worden, zowel qua geheugenruimte als qua coding.

```
Pseudo Code Newton-Raphson Root finding
Let f: Rⁿ → Rⁿ, f(x) = We(x) - W
f(x1, x2, ...xn) = ( f1(x), f2(x), ..., fn(x) )
  Let ||x|| = √xTx, where xT is transpose of x
  Let ε_limit = convergence tolerance limit in x
  Let δ_limit = model precision limit in f(x)

Solve f(x) = (0, 0, ..., 0)
Newton-Raphson iteration
init:
x = 0;
loop ( u=0, 1, … u_max while f(x)T f(x) > δ²_limit )
  Jf(x) [i,k] = ∂fi(x) / ∂xk

  κ = max(Jf[i,i]) / min(Jf[i,i])
  if √κ > 2 × N then exit loop

  δx = [Jf(x)]^-1 -f(x), or solve unknown δx in Jf(x) δx = -f(x)
  x ← x + δx
  if δxT δx ≤ ε²_limit then exit loop

Solve: Ax = b, or alternatively: M^-1 Ax = M^-1 b
A = Jf, b = -f, ε = error tolerance limit
Matrix inversion by Preconditioned Conjugate Gradient method
d = search direction, r = residual, x = solution, M = Diag(A)
Minimize A-norm: ||d||A = ||dAd||
init:
  x = 0; r = b - Ax; d = M^-1 r ; δ_new, δ0 = rT d; ε = exp(-2)

  loop ( t=0, 1, … t_max while δ_new > ε² × δ0 )
    When preconditioned, then recalibrate d to Σd = 0
    q = Ad
    if dT q < -2^-53 then error matrix is not positive-definite
    if dT q < max(δ²_limit, 2^-53) then exit loop
    α = δ_new / dT q
    x = x + αd

    r = b - Ax , or cumulative r = r - αq
    δ_old = δ_new
    δ_new = rT M^-1 r
    β = δ_new / δ_oud
    d = M^-1 r + βd
```

Een groot voordeel is ook, dat de methode werkt als de rijen van de matrix afhankelijk zijn (de determinant = 0). Als de som van de zoekvektor (d) nul is, dan is het resultaat van de CG-iteratie met J_g (parametrisatie 3) gelijk aan de CG-iteratie met J_f. Hint: $\Sigma Rij\ J_f = 0$, en $\Sigma(We\text{-}W) = 0$. Door de CG-iteratie direct toe te passen op de oorspronkelijke matrix J_f, wordt deze werkwijze uitermate praktisch, met name als de matrix J_f sparse is.

Als we geen precondition toepassen, dan blijft de som van alle correcties 0. Anders rekalibreren we alle actieve spelers in de de zoek-vector (d), zodanig dat Σd = 0. De ratings blijven op hun plaats en er is geen noodzaak om de ratingvector zodanig te rekalibreren dat de gemidddelde rating gedurende de iteratie constant blijft.

De Steepest Descent is de CG-iteratie met $\beta = 0$, dus zonder toepassing van zoekvector (d).

Zie hier voor een detail uitwerking van de CG-methode.

Complexiteit van de Conjugate Gradient iteratie Als de verwachtingsfunctie lineair is, dan is één matrix inversie voldoende om de oplossing te bepalen. Deze matrix inversie beperkt zich tot één CG-stap als alle spelers elkaar evenveel ontmoeten (round robin toernooi).

Zij $\omega = (\kappa - 1) / (\kappa + 1)$, waarbij het conditiegetal $\kappa = \lambda_{max} / \lambda_{min}$, en λ_{max}, λ_{min} de maximale en minimale eigenwaarden zijn van $J_f[n+1, n+1]$. De convergentiesnelheid van de Steepest Descent, Conjugate Gradient iteratie is gelijk aan ω, respectievelijk ω^2. Iedere CG-stap vermindert de fout e_i volgens:

- $||e_i.J_f e_i|| = [\omega^2]^i\ ||e_0.Ae_0||$. De iteratie stopt indien:
- $\delta_{new} < \varepsilon^2 \times \delta_0$, waarbij ε de factor is waarmee we de initiale fout willen verminderen. Het maximaal aantal stappen i als functie van de errortolerantie ε wordt bij benadering gegeven door:
- $i \leq 0{,}5 \times \sqrt{\kappa} \times \ln(2 / \varepsilon)$. Als ondergrens voor κ hanteren we het quotiënt van het grootste en het kleinste element (> 0) van de diagonaal van J_f.

Voor ε kiezen we in deze procedure een klein getal groter dan 0, maar niet te klein. Geïnspireerd door de vorige formule, en uitgaande van N / 2 ronden, kiezen we:

- $\varepsilon = \lim ((x-1)/(x+1))^{2.(x/2)} = 1 / e^2$, voor $x \to \infty$. Een alternatief is:
- $\varepsilon = 2 / e^{\ln(N)}$, of $\varepsilon = 2 / N$.

Terzijde: Als de verwachtingsfunctie lineair is en het toernooi is round-robin, of "n-regular bi-partite", dan wordt de oplossing in maximaal één, respectievelijk twee stappen gevonden.

Starten NR-iteratie De methode kan makkelijk ontsporen als de initiële ratings niet goed worden gekozen. Een veilige aanname is: alle spelers zijn even sterk. Kies voor alle spelers het gewenste groepsgemiddelde:

- $T^{(0)} = c$

Divergentie

De NR-iteratie stopt als de matrix 'verdacht' is, d.w.z. het aantal verwachte CG-iteratiestappen groter is dan het aantal spelers N. De iteratie divergeert zeker, ook voor kleine N, indien:

- $0{,}5 \times \sqrt{\kappa} > \Sigma_i N_i$

Stoppen NR-iteratie De performancerating wordt gepubliceerd als geheel getal. Dit is het uitgangspunt van de convergentietolerantie δ. Om een oplossing te bereiken, die afgerond op gehele getallen, stabiel is, d.w.z die niet verder stijgt of daalt, moeten we de gezamenlijke fout van alle spelers beperken tot $\delta = 1$. Hierin is:

- δ de convergentietolerantie
- $e = Pr^* - Pr$, de foutvector e
- $||e^{(n+1)}||$, de gezamelijke fout in iteratie stap (n+1)

- $||x|| = \sqrt{x^T.x}$, de Euclidische norm van vector x
- Pr^* de te bepalen limiet
- $Pr^{(i)}$ de rij van benaderingen. Verder stellen we:
- $\Delta Pr^{(n+1)} = Pr^{(n+1)} - Pr^{(n)}$, de verschilvector tussen stap n+1 en n, en
- $\Sigma\Delta Pr = 0$, d.w.z. tijdens de iteratie vindt er geen verschuiving plaats.

Om de stopconditie scherper af te bakenen definiëren we:

- $a = ||\Delta Pr^{(n+1)}|| / ||\Delta Pr^{(n)}||$, de convergentiefactor.

Als de convergentie geometrisch is met factor a dan geldt:

$$||Pr^*|| \approx ||Pr^{(n+1)}|| + ||\Delta Pr^{(n+1)}|| / (1 - a).$$

De stopconditie $||e^{(n+1)}|| < \delta$ wordt:

> $0 < ||\Delta Pr^{(n+1)}|| / (1-a) < \delta$, indien $a < 1$, en
> $0 < ||\Delta Pr^{(n+1)}|| < \delta$, als de reeks divergeert

De convergentie snelheid van de Newton-Raphson iteratie is kwadratisch: $||e^{(n+1)}|| \approx ||(e^{(n)})^2||$. Iedere stap wordt de exponent verdubbeld, evenals het aantal correcte decimalen. Als $||\Delta Pr^{(n+1)}|| < 1$, dan kan de stopconditie vereenvoudigd worden tot:

> $||\Delta Pr^{(n+1)}|| < \delta$

Discussie en samenvatting

Competitie met 75 personen, 8 rondes, 442 partijen. Stop criteria: $||Pr^* - Pr^{(n)}|| < 1$

Methode	#Iteraties
Zermelo	1335
Basismethode	826
Gradient Descent	321
Steepest Descent	10 + 497 = 507
Newton-Raphson	8 + 60 = 68
NR (Preconditioned)	8 + 49 = 57

De convergentie van de hier besproken iteratieve procedures is notoir lastig te doorgronden, zowel wat betreft snelheid als ook stabiliteit. De voorlopige conclusie is samengevat in nevenstaande tabel. De naïeve methoden hebben soms onpraktisch veel iteraties nodig om een oplossing te bereiken. Daarentegen is de Newton-Raphson methode kwadratisch snel, meer in het bijzonder als de methode in de buurt van de oplossing komt. Als de verwachtingsfunctie lineair is (AVG400, Sonas) dan is één hoofdstap voldoende. Maar de eerlijkheid gebied te zeggen dat dit inclusief een matrix-inversie is. En de matrix inversie wordt zelfs bij een relatief gering aantal spelers, b.v. 70, al een probleem. We kunnen de matrixinversie echter vermijden door de toepassing van Krylov-methodes, bijvoorbeeld de Conjugate Gradient methode. Een bijkomend voordeel is dat de berekening zich kan beperken tot producten van vectoren, en er geen noodzaak is de onderliggende matrix expliciet op te slaan. $J_f(i\ ,k)$ mag ook een functie-aanroep zijn in plaats van een referentie aan een matrixelement. Merk op dat in de CG-iteratie O(N x R) stappen nodig zijn om de nieuwe zoek richtingen (d) te vinden. Het gewicht van de CG iteratie telt even zwaar als een hoofd-operatie.

Methoden op basis van afgeleiden kunnen makkelijk ontsporen, als het startpunt niet goed wordt gekozen. De meest betrouwbare aanname is: alle spelers zijn even sterk. De update van de Zermelo-iteratie is op basis van het quotiënt tussen werkelijke score en verwachte score : $Pr^{(n+1)} = Pr^{(n)} + \ln(W / We)$. De convergentie wordt steeds trager naarmate de oplossing beter benaderd wordt (te vergelijken met een klepstuw in de polder). De Zermelo-procedure is met afstand de traagste. Daar staat dan weer wel tegenover dat de iteratie altijd convergeert naar één unieke oplossing. Met uitzondering van de basismethode, bestaat er geen praktijkervaring met de andere iteratiemethodes.

4. Zermelo 1928

Het artikel *Die Berechnung der Turnier-Ergebnisse als ein Maximum-problem der Wahrscheinlichkeitsrechnung*[7] van Ernst Zermelo mag beschouwd worden als de grondslag van de moderne ratingwaardering. Wat betreft de statistische verdeling van de speelsterktes liet Zermelo zich inspireren door de verdeling van de snelheden van de moleculen in de kinetische gastheorie, zoals blijkt uit de derde voetnoot: "Dieser Ansatz ist einem insbesondere in de Gastheorie häufig angewendeten Verfahren analog." De door Zermelo afgeleide verdeling is vele malen opnieuw uitgevonden, o.a. door L.I. Thurstone (1927), Bradly, Terry, Luce (1952) en Elo.

De ambitie van Zermelo is om een methode te ontwikkelen, waarmee de spelersvolgorde bepaald kan worden, ook in het geval dat niet alle spelers dezelfde tegenstanders hebben ontmoet ("unbalanced design"), en verder voldoet aan alle redelijke eisen die gesteld kunnen worden en vrij is van paradoxen van de tot dan ontwikkelde methodes.

Bijvoorbeeld, het Sonneborn-Berger (Neustadtl) systeem voldoet niet aan:

- Monotoniciteit. Als een speler meer punten scoort, dan wordt de performancerating beter. Meer in het bijzonder: er is geen concurrent die nog meer profiteert. Landau [1914][8] demonstreert de beperkingen van "Das Qualitätsprinzip" en de daarop gebaseerde Gelbfuhs-Neustadtl-Brandisschen methode.
- Symmetrie, "Independence-of-scale". Stel we verwisselen winst- en verliespartijen. Dan wordt de nieuwe volgorde exact gelijk aan de omgekeerde oorspronkelijke volgorde. De sterkste winnaar moet bij een zinvolle definitie ook de slechtste verliezer zijn. Hasse [1961][9]

  Terzijde: een norm die aan de laatste eis voldoet, is: SB_{winst} - $SB_{verlies}$ of SB_{winst} / (SB_{winst} + $SB_{verlies}$). Scoring with eigenvectors.

- Volgorde stabiliteit. Een speler benadeelt zichzelf altijd meer dan zijn concurrent.

Zoals eerder aangegeven, wordt aan iedere speler een positief getal toegekend. Deze getallen gedragen zich als onderlinge (relatieve) speelsterktes, waarbij de regel is dat de kans dat speler A_r wint van speler A_s gelijk is aan u_r / (u_r + u_s). Een toernooi wordt opgevat als een Bernouilli proces, waarbij een overwinning telt als twee successen en een remise als een succes en een mislukking. Het kernidee is:

> "Unser verfahren komt darauf hinaus, daß die relatieven Spielstärken, als Wahrscheinlichkeiten aufgefaßt und so bestimmt werden, daß die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des beobachteten Turnier-Ergebnisses eine möglichst grosse wird[3])."
>
> [3]) "Dieser Ansatz ist einem insbezondere in der Gastheorie häufig angewendete Verfahren analog."

We zouden er bijvoorbeeld van uit kunnen gaan dat alle deelnemers van het WK dammen 1948 dezelfde relatieve speelsterkte u_x zouden hebben. Echter gezien de score van 37 uit 40 punten van de winnaar, is dat geen erg waarschijnlijke aanname. De niet-negatieve getallen u_1, ..., u_n die zo gekozen zijn dat de waarschijnlijkheid van het toernooiresultaat maximaal is, zijn de door Zermelo voorgestelde volgordecriteria voor de einduitslag van een toernooi.

Verder ontwikkelt Zermelo het idee van een priemtoernooi. Ieder toernooi kan op één manier onderverdeeld worden in priemtoernooien. Voor een priemtoernooi geldt: alle spelers die niet tot het priemtoernooi behoren, hebben of alles gewonnen, of alles verloren of geen enkele partij gespeeld tegen de deelnemers van het priemtoernooi. Deze priemtoernooien C_1, C_2..., C_n maken of onderdeel uit van een keten $C_1 > C_2 \ldots > C_n$, of kunnen niet met elkaar worden vergeleken. Bijzonder praktisch is het advies:

> Vorher muß man sich aber erst von der "Irreduzibilität" des Turniers überzeigt bzw. die erforderliche Zerlegung in "Primturniere" vorgenommen haben.

Met een verwijzing naar de extremumstelling van Weierstrass toont Zermelo voor priemtoernooien aan dat een maximale kans altijd bestaat, en dat dit maximum bereikt wordt als voor alle spelers het aantal verwachte overwinningen gelijk is aan het werkelijke aantal. En verder dat de bijbehorende relatieve speelsterktes op een factor na, uniek zijn. Verder laat Zermelo zien dat in een rond-toernooi bij de meest waarschijnlijke uitslag, de volgorde van de relatieve speelsterktes gelijk is aan de volgorde van de wedstrijdpunten. In de situatie dat spelers verschillende tegenstanders hebben ontmoet ("unbalanced design") heeft de PR een groter oplossend vermogen. In een round-robin toernooi is de volgorde van wedstrijdpunten en PR identiek.

Tenslotte ontwikkelt Zermelo een iteratieve procedure om de gevraagde speelsterktes te berekenen, en bewijst dat de convergentie volgens een geometrische rij verloopt. Daarnaast bewijst Zermelo dat deze iteratieve procedure éénduidig convergeert in een begrensd gebied. Deze procedure is te fraai om de lezer te onthouden:

Zij $u_r / (u_r + u_t)$ de kans dat speler A_r wint van speler U_t. Dan geldt:

- $k_{rs} \cdot u_r / (u_r + u_s)$, is het verwachte resultaat van A_r tegen A_s, waarbij k_{rs} het aantal gespeelde partijen tussen A_r en A_s is. Als de verwachte uitslag gelijk is aan de werkelijke uitslag dan geldt:
- $g_r = \Sigma_t\, k_{rt}\, u_r / (u_r + u_t)$, voor alle tegenstanders A_t in het priemtoernooi van A_r, waarbij g_r het aantal successen is van A_r.
- $g_r / u_r = \Sigma_t\, k_{rt} / (u_r + u_t)$

en hieruit volgt dan de iteratie voor n = 0, 1,

- $u_t^{(0)}$ = Norm / aantal spelers, voor alle spelers A_t, waarbij Norm > 0, bijvoorbeeld 1, 100
- $g_r / u_r^{(n+1)} = \Sigma_t\, k_{rt} / (u_r^{(n)} + u_t^{(n)})$

waarbij de iteratie stopt als de u_t niet merkbaar meer veranderen. Zo afgebeeld, is er sprake van een dekpuntiteratie (fixedpoint iteration). Zermelo bewijst dat onder bepaalde voorwaarden een unieke oplossing bestaat. Terzijde: Was Zermelo op de hoogte van de contractiestelling van Banach (1922) ?

De convergentie van deze iteratie verloopt, zoals Zermelo aantoont, volgens een meetkundige rij. De convergentie van de iteratie is traag. Dit in tegenstelling tot de Newton-Raphson methode, die in de buurt van de nulpunten kwadratisch convergeert. De Zermelo methode is bijzonder geschikt als er sprake is van:

- toepassing met pen en papier

- beperkte nauwkeurigheid
- ‘gering’ aantal spelers en partijen.

We kunnen de Elo-rating met standaard logistische functie zien als het logaritmische equivalent van de Zermelo-rating. De Elo rating kan eenvoudig afgeleid worden uit de Zermelo-rating en omgekeerd. En voordeel is dat de Elo-ratings voor de geheel reële x-as zijn gedefinieerd.

Zermelo en Newton-Raphson iteratie

De functie F(x) = We(x) - W, waarbij de verwachte score bepaald wordt door Z(x,y) = x / (x+y), kan met de Newton-Raphson methode worden opgelost. De afgeleide functies zijn:

- $Z(x,y) /\partial x = y / (x+y)^{\wedge 2}$
- $Z(x,y) /\partial y = -x / (x+y)^{\wedge 2}$

De convergentie is even snel ,als de vergelijkbare procedure op basis van de logistische functie. Maar de NR-iteratie garandeert niet dat $x^{(n+1)} > 0$ blijft. Dit moet geforceerd worden.

De afgeleiden van de logistische functie $E(t,u) = 1 / (1+ e^{-(t-u)/s})$ is gelijk aan:

- $E(t,u) /\partial t = e^{t/s} \times e^{u/s} / (e^{t/s} + e^{u/s})^{\wedge 2}$
- $E(t,u) /\partial u = -e^{t/s} \times e^{u/s} / (e^{t/s} + e^{u/s})^{\wedge 2}$

Met behulp van bovenstaande functies kan de de Zermelo Jacobiaan, vertaald worden naar de Jacobiaan van de logistische verwachtingsfunctie:

- $x \times Z(x,y) /\partial x = E(t,u) /\partial t$
- $y \times Z(x,y) /\partial y = E(t,u) /\partial u$

Zermelo-iteratie in het Elo gebied

Opmerking: de vergelijking van het iteratieproces kan ook geschreven worden als::

- $u_r^{(n+1)} = u_r^{(n)} . g_r / e_r^{(n)}$, waarbij het verwachte resultaat e_r gelijk is aan:
- $e_r^{(n+1)} = \Sigma_t k_{rt} . u_r^{(n+1)} / (u_r^{(n)}+ u_t^{(n)})$, d.w.z: de kans dat speler A_r wint van speler A_t, vermenigvuldigd met het aantal onderling gespeelde partijen, gesommeerd over alle tegenstanders A_t van A_s

De door Zermelo bedachte dekpuntiteratie kan getransponeerd worden naar de Elo performanceratings (verwachtingsfunctie is logistisch). Vermenigvuldigen met(g_r / e_r) wordt in het logaritmische gebied optellen met Ln(g_r / e_r). De iteratie is langzamer dan de eerder besproken benadering. Verder is het een voordeel dat de Elo-ratings voor de geheel reële x-as zijn gedefinieerd, en niet alleen voor positieve getallen.

De iteratie formule is:

- $T^{(0)} = 0$
- $T^{(n+1)} = T^{(n)} + Delta^{(n)}$, waarbij $Delta^{(n)} = (..., d_r^{(n)}, ...)$, en
- $d_r^{(n)} = Ln(g_r / e_r^{(n)}) \times s$, waarbij $e_r^{(n)}$ de verwachte score uit de vorige iteratie is, en s de x-as verlengingsfactor van de verwachtingsfunctie. g_r en $e_r^{(n)}$ zijn groter dan 0 (priemtoernooi)

- Tenslotte moet $Delta^{(n)}$ genormeerd worden op 0.

Voorbeeld: New York 1924 chess tournament

- PR Elo, performancerating volgens logistsche verwachtingsfunctie, genormeerd op 0
- PR 1928, Zermelo-performancerating zoals gepubliceerd in 1929 (11 iteraties met de hand uitgevoerd!)
- PR* 1928, Zermelo-performancerating met fout < Eps (=0.00001) , Sum = 100
- PR* Π=1, Zermelo-performancerating met fout < Eps, Product = 1
- Elo N=0, Ln(PR* Π=1) × s, s = 400 / ln(10), Ln() is natuurlijke logaritme functie.

New-Yorker Meisterturnier 1924

#	Player	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	Pts	PR 1928	PR* 1928	PR* Π=1	Elo Σ=0
1	Emanuel Lasker (Germany)	xx	½0	1½	½1	11	11	11	½1	½1	½1	11	16	26,40	27,16	3,84	234
2	José Raúl Capablanca (Cuba)	½1	xx	½½	½½	01	½1	11	11	1½	½1	½1	14½	18,40	18,40	2,60	166
3	Alexander Alekhine (France)	0½	½½	**	½½	10	1½	½½	½½	11	½½	11	12	10,70	10,55	1,49	69
4	Frank Marshall (United States)	½0	½½	½½	**	½1	0½	01	½0	½1	1½	11	11	8,71	8,58	1,21	34
5	Richard Réti (Czechoslovakia)	00	10	01	½0	xx	½½	01	11	10	10	11	10½	7,84	7,75	1,10	16
6	Géza Maróczy (Hungary)	00	½0	0½	1½	½½	xx	01	½½	11	½1	10	10	7,12	7,01	0,99	-2
7	Efim Bogoljubow (Soviet Union)	00	00	½½	10	10	10	xx	01	11	½1	01	9½	6,40	6,33	0,90	-19
8	Savielly Tartakower (Poland)	½0	00	½½	½1	00	½½	10	xx	10	½0	½1	8	4,72	4,66	0,66	-72
9	Frederick Yates (England)	½0	0½	00	½0	01	00	00	01	xx	11	½1	7	3,84	3,78	0,53	-109
10	Edward Lasker (United States)	½0	½0	½½	0½	01	½0	½0	½1	00	xx	0½	6½	3,44	3,39	0,48	-128
11	Dawid Janowski (France)	00	½0	00	00	00	01	10	½0	½0	1½	xx	5	2,43	2,39	0,34	-189
	Norm													100	100	1	0

De keuze van Zermelo voor het New-York master toernooi is enigszins merkwaardig te noemen. In zijn inleiding refereert Zermelo aan "abgebrochenen" toernooien. Het kan haast niet anders of hij moet gedacht hebben aan het Mannheim 1914 toernooi, wat daadwerkelijk werd "onderbroken"door de 1e wereldoorlog. Op het moment dat het toernooi werd stil gelegd (de betrokkenen dachten dat het toernooi na enige weken weer hervat zou kunnen worden), leidde Alekhine met een vol punt voorsprong op Vidmar. Maar Vidmar had sterkere tegenstanders ontmoet, waaronder de nummer 2 t/m 7 van de ranglijst. Toch zou Alekhine dit toernooi ook gewonnen hebben met de Zermelo-performancerating (maar niet met AVG400!).

Zie hier voor een detailuitwerking van de Zermelo methode.

De hoogste PRi aller tijden: Piet Roozenburg in het wereldkampioenschap dammen 1948

In 1948 werd Roozenburg wereldkampioen dammen, na een imposante overwinning in een dubbel round-robin toernooi. Roozenburg scoorde 37(!!) dampunten uit 20 partijen (92,5%). In de AVG400, inclusief de remise tegen zichzelf, is dit een ratingprestatie van (+17) / 22 × 400 = 309 punten ten opzichte van het toernooigemiddelde. We schatten Henk Laros (conservatief) in op 1450, Zijn resultaat was (+2 / 22) × 400 = 36 ratingpunten boven het gemiddelde. Dit geeft een toernooigemiddelde van 1414. Dit brengt de toernooiprestatie van Roozenburg op 1723 KNDB ratingpunten.

Player	Rating	W	N	We(R)	P(R)	σ(R)	W - We	> σ
Alexander Baliakin	1520	8,0	11	6,48	0,59	1,63	1,52	
Roel Boomstra	1537	7,5	11	6,75	0,61	1,61	0,75	
Ron Heusdens	1517	7,0	11	6,43	0,58	1,63	0,57	
Pim Meurs	1522	6,5	11	6,51	0,59	1,63	-0,01	
Wouter Sipma	1443	6,0	11	5,22	0,47	1,66	0,78	
Anton van Berkel	1435	6,0	11	5,09	0,46	1,65	0,91	
Geert van Aalten	1421	5,5	11	4,86	0,44	1,65	0,64	
Ben Provoost	1474	5,5	11	5,73	0,52	1,66	-0,23	
Auke Scholma	1491	4,5	11	6,01	0,55	1,65	-1,51	
Hein Meijer	1430	3,5	11	5,01	0,46	1,65	-1,51	
Mike Koopmanschap	1375	3,5	11	4,12	0,37	1,61	-0,61	
Jan van Dijk	1354	2,5	11	3,80	0,35	1,58	-1,30	

De betrouwbaarheid van de ratings (KvN 2014) We nemen aan dat de score binomiaal verdeeld is. Na n partijen is de standaard afwijking σ gelijk aan: $\sqrt{np(1-p)}$, waarbij p de kans op succes is (We / n). We kijken nu naar het verschil van de werkelijke en verwachte scores: |W - We|. Minimaal 68% van de spelers moet binnen de tolerantie van één σ vallen. In dit voorbeeld is dit zelfs 100%. Alle spelers hebben binnen de statistische toleranties gepresteerd.

Variantie en spreiding van wedstrijdpunten Als er geen remise mogelijk is, dan vormen de wedstrijden van de spelers een Bernoulli experiment: de uitkomst van een dobbelsteen met twee uitkomsten: succes (1) of mislukking (0). Stel nu dat er 11 keer gegooid wordt: er is maar één manier om 11 keer te slagen of te falen. De kans dat dit als gevolg van toeval optreed is niet groot. Het aantal mogelijke combinaties die optellen tot ongeveer 50% is veel groter. Maar hoeveel groter ? Het aantal combinaties om h punten te scoren in n wedstrijden is gelijk aan de coëfficiënt van x^h in de polynoom $(1 + 1.x)^n$. Deze coëfficiënten kunnen met de beroemde driehoek van Pascal berekend worden. Het principe is: het aantal mogelijkheden, $C_{(n,\ h)}$, om met een tweezijdige dobbelsteen na n partijen h punten te scoren is gelijk aan de som van:

- Het aantal mogelijkheden om na n-1 partijen h-1 punten te scoren, en vervolgens te winnen
- Het aantal mogelijkheden om na n-1 partijen h punten te scoren, en vervolgens te verliezen

Samengevat:

- $C_1(0,0) = 1$
- $C_1(n, h) = C_1(n-1, h-1) + C_1(n-1, h)$, met $n \geq 1$

Dit probleem is door De Moivre (The Doctrine of Chances, 1756) uitgebreid naar een dobbelsteen met J mogelijkheden: "To find how many chances there are upon any number of dice, each of them of the same number of faces, to throw any given number of points". In het geval van dammen J = 3:

0, 1 en 2. De coëfficiënten van $(1 + 1.x + 1.x^2)^n$ vormen de verdeling. De recurrente betrekking van de uitgebreide Pascal-De Moivre driehoek is:

- $C_2(0,0) = 1$
- $C_2(n, h) = C_2(n-1, h-2) + C_2(n-1, h-1) + C_2(n-1, h)$, delen door J^n geeft een waarschijnlijkheidsverdeling met variantie:
  - $\sigma_2 = n(J^2 - 1)B_2 / 2$, over een x-as bereik van [0, (J-1)n]. B_2 is het tweede Bernoulli getal = 1/6. Na delen door $(J-1)^2$
  - $\sigma_2 = n((J + 1)/(J - 1))B_2 / 2$, over een x-as bereik van [0, 1/(J-1), 2/(J-1), … , n], het bereik van de binomiale verdeling

De binominale verdeling loopt over [0, n]. De trinomiale verdeling is gedefinieerd over [0, 2n]. Wanneer we hiervoor corrigeren (delen door 2^2) dan geldt voor een eerlijke dobbelsteen -alle uitkomsten even waarschijnlijk-

> de variantie van de trinomiale verdeling is een factor ((3+1)/(3-1)) / ((2+1)/(2-1)) = 2 / 3 kleiner dan de variantie van de binomiale verdeling.

We kunnen dit ook als volgt inzien: zonder remise is de variantie van een partij tussen twee even sterke spelers per definite gelijk aan $(0 - \mu)^2 / 2 + (1 - \mu)^2 / 2 = 0{,}25$ en $\mu = (0 + 1)/2$. Inclusief remise wordt dit: $(0 - \mu)^2 / 3 + (0{,}5 - \mu)^2 / 3 + (1 - \mu)^2 / 3 = 1/6$ en $\mu = (0 + 0{,}5 + 1)/3$. Dit is een factor 2/3 kleiner dan de variantie zonder remise.

Geldt dit resultaat ook als spelers niet even sterk zijn? Voor de verdeling van de kansen over 0, 1 2 kiezen we een geometrische verdeling, voortgebracht door p, q als volgt:

Dobbelsteen (m=3)	**0**	**1**	**2**
Kansverdeling	q^2	**p.q**	p^2

Hierin is p een positief getal tussen 0 en 1. We kunnen nu met meer (generating functions) of minder moeite afleiden:

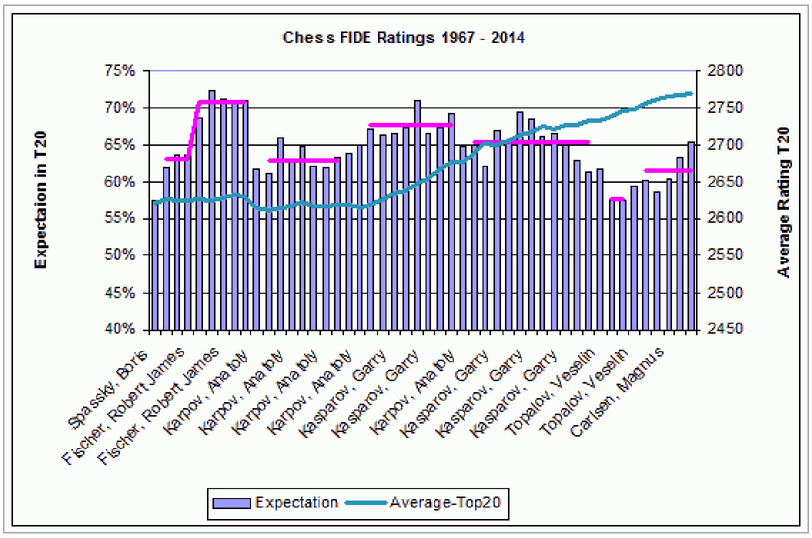
- $q^m - p^m = (q - p)(q^{m-1} + pq^{m-2} + \ldots + p^{m-2}q + p^{m-1})$, omdat alle kansen optellen tot 1:
- $q^m - p^m = (q - p)$
- $q = (1 - p)$, $m = 2$
- $q = (-p + \sqrt{(4 - 3p^2)}) / 2$, $m = 3$
- $\mu = npq(1 - mp^{(m - 1)} / (q - p))$, $Pct = \mu / 2$
- $\sigma^2 = npq((1 - m^2(pq)^{m - 1}) / (q - p)^2)$

Aan te tonen is dat $(\sigma^2 / 4) / (1 - Pct) \times Pct) \approx 2 / 3$. De Taylorreeks ontwikkeling in $x = 1 / \sqrt{3}$ geeft:

- $C(z) = 2/3 - 4/9z^2 - 4/9\sqrt{3}z^3 -7/9z^4 - 14/9\sqrt{3}z^5 + O(z^6)$, $z = 1 - x = 1 / \sqrt{3}$. Het maximum van C(z) tussen 0 en 1 is gelijk aan 2/3.
- Verder is de limiet voor x = 0, en x = 1 gelijk aan 0,5.

Het verschil tussen deze verdelingen en de normale verdeling is klein, ook als n relatief klein is (11).

Top-20 FIDE-ratings van Boris Spasski tot Magnus Carlsen



In de grafiek ziet u de verwachting van de rating van de kampioen van de FIDE-ratinglijst, tegen de ratings van de eerstvolgende 19 spelers. De overmacht van Robert Fischer is onmiskenbaar. De lijn laat de gemiddelde ratingontwikkeling zien. Duidelijk blijkt de ratinginflatie sinds 1985.

Zie ook:

- Elo, Arpad.E (1978). *The Rating of Chessplayers, Past and Present.* Arco. ISBN 0-668-04721-6.
- *Introductory note to 1928*, Mark E. Glickman
- FIDE Handbook, B. Permanent Commissions, 01. International Title Regulations (Qualification Commission), 1.48 Performancerating (Rp)
- FIDE Handbook, B. Permanent Commissions, 02. FIDE Rating Regulations (Qualification Commission)
- KNDB, Ratingberekening en ratingregels, nieuwe ratingregels
- H3 Rekenregels KNSB Ratingsysteem
- KNTB Dynamische Speelsterkte Systeem (DSS)
- Chessmetrics
- The Elo-rating system
- Rating Central: How the Rating System Works
- Tarjan's_strongly_connected_components_algorithm
- Secant method
- Jacobian_matrix_and_determinant
- Trinomial Triangle
- *An Introduction to the Conjugate Gradient Method Without the Agonizing Pain*, 1994, Jonathan Richard Shewchuk
- Jaan Kiusalaas (2005). *Numerical Methods in Engineering with Python* Cambridge. ISBN 978-0-521-85287-6.
- W.H. Press, *Numerical recipes in C*

Bronnen:

[1] Toernooimanager Sevilla

[2] Elo oddities: the tortoise and the hare

[3] Navara wins Czech Championship with 8.5/9 points

[4] Ken Thompson's 100% / 0% performance rating is flawed

[5] Elo berekening basismethode Kees Dekker, communicatie door JP Hendriks

[6] An Improved Algorithm for Finding the Strongly Connected Components of a Directed Graph, David J. Pearce

[7] Die Berechnung der Turnier-Ergebnisse als ein Maximum-problem der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Mathematische Zeitschrift 29 (1929), p. 436-460, E. Zermelo

[8] Über Preisverteilung bei Spielturnieren. Zeitschrift für Mathematik und Physik 63 (1915), S. 192, Edmund Landau

[9] Über die Behandlung graphentheorischer Probleme unter Verwendung der Matrizenrechnung. Wiss. Z. Techn. Univer. Dresden, 10 (1961), 1313–1316, Maria Hasse

[10] Graph Theory, Addison Wesley (1972), 199-205, Frank Harary

Excel Sheets:

- Calculation FIDE Rating Table 8.1b, Reliability of the ratings
- Finding the Strongly Connected Components of a Directed Graph

- Zermelo Iteration
- Zermelo iteration on Elo ratings
- Scoring with Principal Perron Frobenius eigenvectors
- Gerard de Graan Iteration
- Root finding by Secant Iteration and 100% model
- Root finding by Newton Raphson Iteration and Jacobian matrix inversion
- Newton Raphson Iteration and Jacobian matrix inversion by Conjugate Gradient method

Terug